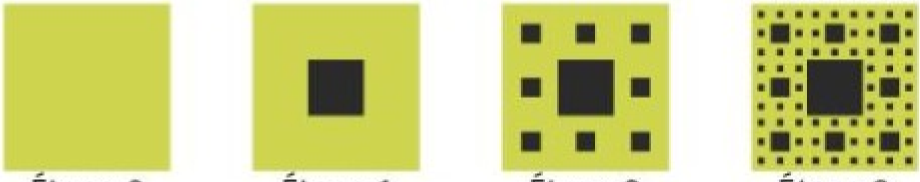
Sujet

Tapis de Sierpiński

On considère un carré dont l'aire est de 1 m^2. Pour construire la figure ci-dessous, on partage ce carré en neuf carrés égaux et on noircit celui du centre.
On partage ensuite chacun des huit carrés restants en neuf carrés égaux et on noircit les huit carreaux au centre.
On recommence cette construction à chaque étape. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note A_n l'aire totale noircie après la n-ième l'étape. On a donc $A_1 = \frac{1}{9}$.



Étape 0 Étape 1 Étape 2 Étape 3

1. a. Quelle proportion de la surface verte restante est noircie à chaque étape ?

b. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$A_{n+1} = \frac{8}{9}A_n + \frac{1}{9}.$$

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $B_n = A_n - 1$.

a. Montrer que la suite (B_n) est géométrique.
Préciser sa raison et son premier terme.

b. Exprimer B_n en fonction de n.

c. Exprimer alors A_n en fonction de n.

d. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n$.